Statistik für SozialwissenschaftlerInnen II

Henning Best

best@wiso.uni-koeln.de

Universität zu Köln

Forschungsinstitut für Soziologie

Testen von Hypothesen

Ziel der Testtheorie

Ziel der Testtheorie ist es, zu überprüfen, “inwieweit die postulierten Eigenschaften der Population (Theorie) durch stichprobenartig erhobene Daten (Empirie) bestätigt werden können” [Bortz, 1999, 107].

Hypothesen über die Grundgesamtheit sollen also anhand von Stichprobendaten überprüft werden (Inklusionsschluss).

Arten von Hypothesen

- *ungerichtete Unterschiedshypothese*:
  Frauen und Männer unterscheiden sich bezüglich ihrer Religiosität.
- *gerichtete Unterschiedshypthese*:
  Frauen sind religiöser als Männer.
- *ungerichtete Zusammenhangsypothese*:
  Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Alter und der Religiosität einer Person.
- *gerichtete Zusammenhangshypothese*:
  Je älter eine Person ist, desto religiöser ist sie.

Problematik des Inklusionsschlusses

Können folgende Hypothese für die Population als gültig angenommen werden?

- „Ost- und Westdeutsche unterscheiden sich hinsichtlich ihres Nationalstolzes“
- „Ost- und Westdeutsche unterscheiden sich hinsichtlich ihres monatlichen Nettoeinkommens“

	Ost	West	Gesamt
Nationalstolz	2,13	2,10	2,11
Einkommen	2009 DM	2680 DM	2539

Anmerkung: „Nationalstolz“ wurde auf einer 4-stufigen Skala gemessen mit
1 = „sehr stolz auf Deutschland“ und
4 = „gar nicht stolz auf Deutschland“

Statistische Hypothesen

- Statistische Hypothesen bestehen immer aus einer „Alternativhypothese (H_1)“, die die inhaltliche Hypothese expliziert und einer „Nullhypothese (H_0)“, die einfach besagt, dass der postulierte Sachverhalt nicht zutrifft.
  - Inhaltliche Hypothese: „Ost- und Westdeutsche unterscheiden sich hinsichtlich ihres Nationalstolzes.“
    - $\mathrm{H}_1 : \mu_o \neq \mu_w$
    - $\mathrm{H}_0 : \mu_o = \mu_w$
  - Inhaltliche Hypothese: „Der Nationalstolz von Westdeutschen ist größer als der von Ostdeutschen.“
    - $\mathrm{H}_1 : \mu_w > \mu_o$
    - $\mathrm{H}_0 : \mu_w \leq \mu_o$
- Im Rahmen von statistischen Test wird immer überprüft, ob die Realität mit der H_0 zu erklären ist. Nur falls das nicht der Fall ist, darf sie zugunsten der H_1 verworfen werden!

Fehler beim Hypothesentest

- α-*Fehler oder Fehler erster Art*:
  Auf der Grundlage des Stichprobenergebnisses verwerfen wir die Nullhypothese, obwohl diese in der Grundgesamtheit gilt.
- β-*Fehler oder Fehler zweiter Art*:
  Ausgehend vom Stichprobenergebnis behalten wir die Nullhypothese bei, obwohl in der Grundgesamtheit die Alternativhypothese gilt – die H_0 also hätte verworfen werden müssen

α- und β-Fehler

		In der Grundgesamtheit gilt die	
		H_0	H_1
Entscheidung	H_0	richtige Entscheidung	β-Fehler
	H_1	α-Fehler	richtige Entscheidung

Konfidenzintervall und Hypothesentest

- Nach den zentralen Grenzwerttheorem sind Mittelwertsdifferenzen $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ normalverteilt:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \Rightarrow N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2})$$

- Für normalverteilte Kennwerte können Konfidenzintervalle berechnet werden.
- Bei einer ungerichteten Alternativhypothese gilt:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$$

- Falls das Konfidenzintervall der Mittelwertsdifferenz also den Wert 0 nicht einschließt, können wir die Nullhypothese mit bestimmbarer Sicherheit bzw. Unsicherheit (z.B. 0,95 oder 95 %) zurückweisen.

Konfidenzintervall d. Mittelwertsdifferenz

- Das Konfidenzintervall lautet

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z * \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$$

- Zur Berechnung benötigt man neben den Stichprobenmittelwerten den Standardfehler der Mittelwertsdifferenz $\widehat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$:

$$\widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_1} + \widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_2}$$

- Da $\widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_1} = \frac{\widehat{\sigma}^2_1}{n_1}$ und $\widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_2} = \frac{\widehat{\sigma}^2_2}{n_2}$ gilt:

$$\widehat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_1} + \widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_2}} = \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2_1}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}^2_2}{n_2}}$$

Beispiel: Nationalismus

Hypothese: „Ost- und Westdeutsche unterscheiden sich hinsichtlich ihres Nationalstolzes."

- Nationalstolz Ost: $\bar{x}_o = 2,13; \widehat{\sigma}_o^2 = 0,80; n_o = 528$
- Nationalstolz West: $\bar{x}_w = 2,10; \widehat{\sigma}_w^2 = 0,83; n_w = 851$
- Differenz: $\bar{x}_o - \bar{x}_w = 2,13 - 2,10 = 0,03$
- Nullhypothese: $\bar{x}_o - \bar{x}_w = 0$

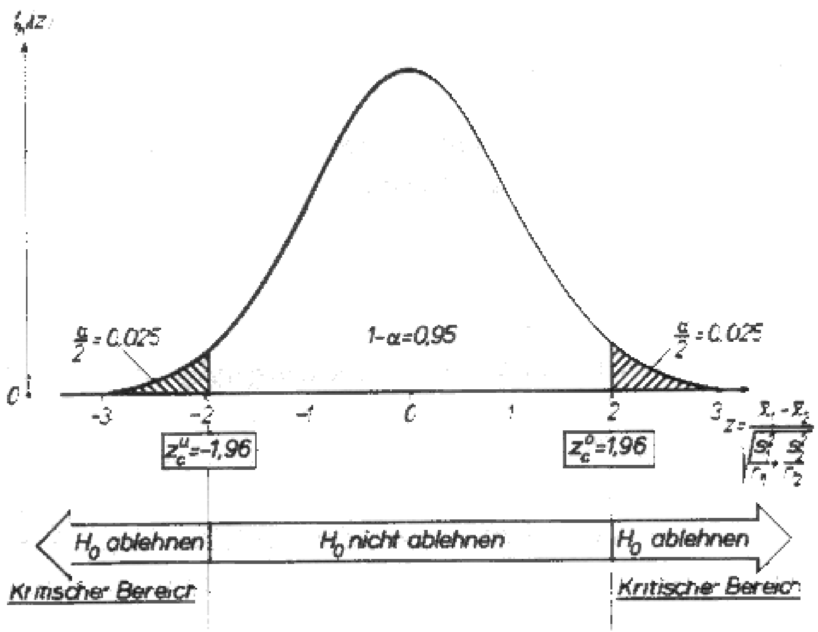
Konfidenzintervall der Mittelwertsdifferenz:

- $(\bar{x}_o - \bar{x}_w) \pm z * \sigma_{\bar{x}_o - \bar{x}_w}$
- $\widehat{\sigma}_{\bar{x}_o - \bar{x}_w} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_o} + \widehat{\sigma}^2_{\bar{x}_w}} = \sqrt{\frac{0,80}{528} + \frac{0,83}{851}} = 0,049$
- $KI_{95} = 0,03 \pm 1,96 * 0,049 = 0,03 \pm 0,096$
- $p(-0,066 \leq \mu \leq 0,126) = 0,095$

Da das Intervall die 0 mit einschließt, kann kann die Nullhypothese nicht mit ausreichender Sicherheit zurückgewiesen werden!

Berechnung des α-Fehlers

Um den α-Fehler *exakt* anzugeben, geht man umgekehrt vor. Es wird angenommen, dass die Nullhypothese gilt. Mit einer z-Transformation kann dann die genaue Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet werden.



$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Da $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \approx \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}}$ und laut H_0 $\mu_1 - \mu_2 = 0$, folgt

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}}}$$

Gerichtete und ungerichtete Hypothesen

Anhand der soeben entwickelten Formel kann der empirische z-Wert berechnet werden. Die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit kann der z-Tabelle entnommen werden. (z.B. $z = -2,0 \rightarrow \alpha = 0,023$)

- Bei ungerichteten Hypothesen $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ muss die Fläche links von $-z$ und rechts von $+z$ berücksichtigt werden, so dass die Irrtumswahrscheinlichkeit bei $z = -2,0\ 2 * \alpha = 0,046$ ist.
- Bei einer gerichteten Hypothese $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ interessiert nur der Flächenanteil rechts von z
- Bei einer gerichteten Hypothese $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ interessiert nur der Flächenanteil links von z

Mittelwertstest bei kleinen Stichproben

Liegt eine Stichprobe vor, bei der $n_1 < 30$ oder $n_2 < 30$ folgt die Verteilung der Mittelwertsdifferenzen nicht der Normalverteilung, sondern einer t-Verteilung.

Als Prüfgroße wird in diesem Fall nicht z, sondern t verwendet, das jedoch exakt wie beim z-Test berechnet wird:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}}}$$

Hinweise und Voraussetzungen:

- Die Freiheitsgrade der t-Verteilung: $df = n_1 + n_2 - 2$
- Die Merkmale müssen in der Grundgesamtheit normalverteilt sein
- Die Varianz des Merkmals muss in beiden Gruppen gleich sein.

Test auf Prozentwertdifferenzen

Ein Test auf Prozentwertdifferenzen ist notwendig bei Hypothesen der Art: „Der Prozentsatz der Gegner eines Schwangerschaftsabbruches ist unter CDU-Anhängern größer als bei SPD-Anhängern“, d.h.

$$H_1 : \pi_c > \pi_s \text{ und } H_0 : \pi_c \leq \pi_s$$

Der Standardfehler von Prozentwertdifferenzen und die Prüfgröße z werden wie folgt berechnet:

$$s_p = \sqrt{\frac{P_1 * Q_1}{n_1} + \frac{P_2 * Q_2}{n_2}}$$

$$z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1 * Q_1}{n_1} + \frac{P_2 * Q_2}{n_2}}}$$

Beispiel Prozentwertdifferenz

Hypothese: „Der Prozentsatz der Gegner eines Schwangerschaftsabbruches ist unter CDU-Anhängern größer als unter SPD-Anhängern“

	CDU	SPD
Abtreibung erl.	32,4% (n=104)	46,4% (n=135)
Abtreibung verb.	67,6% (n=217)	53,6% (n=156)

Quelle: Allbus 2000

Kann die Hypothese mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ beibehalten werden?