Varianzanalysen

Aufgabe

Vergleich der Mittelwerte einer abhängigen Variablen für verschiedene Gruppen, die durch eine unabhängige Variable (Faktor), wie z.B. Geschlecht oder Behandlungsmethode, gebildet werden. Es wird also der Einfluss eines nominal skalierten unabhängigen Merkmals auf ein (i.d. Regel) metrisch skaliertes abhängiges Merkmal untersucht.

Es kann auch der Einfluss meherer Faktoren gleichzeitig auf eine abhängige Variable überprüft werden (mehrfaktorielle Varianzanalysen). Der Vorteil einer mehrfaktoriellen Varianzanalyse gegenüber mehreren einfachen (einfaktoriellen) Varianzanalysen liegt in der Analyse der Interaktion der Faktoren (Wechselwirkung des Einflusses, d.h. in wieweit der Einfluss eines Faktors von der Ausprägung eines anderen Faktors abhängt), sowie in der Reduktion des Versuchsfehlers. Somit bringen mehrfaktorielle Analysen präzisere Ergebnisse.

Die Varianzanalyse ist eine Verallgemeinerung des t-Tests für den Fall, dass mehr als 2 Gruppen oder komplexere Gruppenstrukturen verglichen werden sollen.

Hypothesen

Die Nullhypothese lautet: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_\kappa$, d.h. alle Mittelwerte sind gleich. Die Hypothese wird mit einem F-Wert überprüft. Ist der F-Wert signifikant, so wird die Alternativhypothese angenommen, die bedeutet, dass nicht alle Mittelwerte gleich sind, d.h. mindestens 2 Mittelwerte unterscheiden sich.

Modelle

Einfache Varianzanlyse (1-faktorielle Analyse ohne Messwiederholungen):

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

mit μ = Gesamtmittelwert
$\alpha_i = \mu - \mu_i$ = Abweichung des Gruppenmittelwerts vom Gesamtmittelwert
ε_{ij} = Residuen (Rest).

1-faktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholungen:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

mit τ_j = Versuchsperson-spezifische Abweichung vom Mittelwert μ

Voraussetzungen

Für Varianzanalysen ohne Messwiederholungen:

- Residuen ε_{ij} des Modells normalverteilt (Es genügt, das Merkmal für jede Gruppe getrennt mit einem grafischen Verfahren, z.B. Histogramm, auf Normalverteilung zu überprüfen.)
- Die Gruppenvarianzen σ_1 , σ_2 , ..., σ_k sind (statistisch) gleich (Varianzhomogenität), überprüfbar mit Levene-Test, alternativ: Hartley´s F-max-Test oder Bartlett-Test (Spezialfall des Box-Test).

Bei Varianzanalysen mit Messwiederholungen sind die Voraussetzungen wesentlich komplizierter. Das wichtigste ist die Überprüfung der Varianzhomogenität mit dem Mauchley-Test oder Sphericity-Test.

Robustheit

Die Varianzanalysen sind robust, d.h. nicht allzu krasse Verletzungen der o.a. Voraussetzungen machen die Tests nicht ungültig, sondern führen schlimmstenfalls dazu, dass die Nullhypothese eher angenommen wird, d.h. bei Verletzung der Voraussetzungen sind Mittelwertunterschiede schwieriger nachzuweisen. Um Abweichungen von der Varianzhomogenität Rechnung zu tragen, gibt es Korrekturen (Epsilon-Faktoren) nach Box, Greenhouse-Geisser und Huynh-Feldt, die die Freiheitsgrade reduzieren und damit die Teststärke abschwächen.

Folgetests (Post-hoc-Tests, Einzelvergleiche)

Wenn der Faktor mehr als 2 Ausprägungen hat, d.h. mehr als 2 Gruppen verglichen werden, empfiehlt es sich im Falle eines signifikanten Ergebnisses, zu überprüfen, welche Mittelwerte sich unterscheiden und welche nicht. Dies geschieht mit

multiplen Mittelwertvergleichen, u.a.

- Duncan-Test
- Tukey b-Test
- Newman-Keuls
- Tukey hsd (honestly significant difference)-Test
- Scheffe-Test

paarweisen Vergleichen (z.B. t-Test) mit α-Korrektur, u.a.

- Bonferroni
- Sidak

linearen Kontrasten, sofern die Hypothesen bereits apriori (d.h. vor der Untersuchung/Auswertung) feststanden.

Wenn eine mehrfaktorielle Varianzanalyse gerechnet wird, und eine Interaktion signifikant ist, so können die „simple effects", d.h. Varianzanalysen mit einem Faktor herausgelassen, weitere Aufschlüsse geben (vgl. unten).

2-faktorielle Analyse

Im Falle einer Analyse der Faktoren A und B ist immer zuerst die Interaktion zu untersuchen. Ist diese nicht signifikant, so gelten die Testergebnisse für die Haupteffekte A und B global, d.h. ist z.B. A signifikant, so ist der Einfluss von A (auch quantitativ) dergleiche für alle Gruppen von B. Ist dagegen die Interaktion signifikant, so muss der Einfluss von A und B über „simple effects" analysiert werden, d.h. für jede Gruppe von A muss eine 1-faktorielle Varianzanalyse von B durchgeführt werden, analog für jede Gruppe von B eine 1-faktorielle Varianzanalyse von A.

Andererseits dürfen diese 1-faktoriellen Varianzanalysen für Gruppen getrennt nur im Falle einer signifikanten Interaktion durchgeführt werden.

Alternativtests (1-faktorielle Varianzanalyse)

Für ordinale oder nicht normalverteilte abhängige Merkmale:

Kruskal-Wallis-H-Test	für einfache Varianzanalyse
(Verallgemeinerung des U-Tests)	
Friedman-Varianzanalyse	für Varianzanalyse mit Messwiederholungen
(Verallgemeinerung des Wilcoxon-Tests)	

Für dichotome abhängige Merkmale

χ2-Test	für einfache Varianzanalyse
Cochran´s Q-Test	für Varianzanalyse mit Messwiederholungen

Alternative Verfahren für mehrfaktorielle nichtparametrische Varianzanalysen

Für beliebige nichtmetrische abhängige Merkmale:

Loglineare Modelle

Für dichotome abhängige Merkmale:

Logistische Regression

Für nominale und ordinale abhängige Merkmale:

Polychotome Logistische Regression