Institut für Geophysik und Meteorologie — WS 2008/09
Universität zu Köln

H. Elbern mit A. Strunk — 15. Dezember 2008

Übung zur Vorlesung

Objektive Analyse

Lösungen zu Übungsblatt 2

Lösung zu Aufgabe 3:
Es gelten die folgenden Definitionen:

$$\begin{aligned}
w(r_1, r_2) = w(r_3, r_2) &=: \mu \\
w(r_3, r_1) &=: \nu \\
y_o(r_1) &=: y_1 \\
y_o(r_3) &=: y_3 \\
\mathbf{y_o} &= (y_1, y_3)^T \\
\epsilon_o^2 &= \frac{\sigma_o^2}{\sigma_b^2}
\end{aligned}$$

zu a):
Es gilt: $x_a^0 = x_b \equiv 0$ und

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\nu+\epsilon_o^2} & \frac{\nu}{1+\nu+\epsilon_o^2} \\ \frac{\mu}{2\mu+\epsilon_o^2} & \frac{\mu}{2\mu+\epsilon_o^2} \\ \frac{\nu}{1+\nu+\epsilon_o^2} & \frac{1}{1+\nu+\epsilon_o^2} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit Gleichung (II 1.4) aus Vorlesung für die erste Iteration:

$$\begin{aligned}
x_a^1(r_2) &= \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}(y_1 + y_3) \\
x_a^1(r_1) &= \frac{y_1 + \nu y_3}{1 + \nu + \epsilon_o^2} \\
x_a^1(r_3) &= \frac{y_3 + \nu y_1}{1 + \nu + \epsilon_o^2}
\end{aligned}$$

Erneutes Einsetzen in (II 1.4) führt zur Lösung bei r_2 für die zweite Iteration:

$$\begin{aligned}
x_a^2(r_2) &= \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}(y_1 + y_3) + \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}\left[y_1 + \frac{y_1 + \nu y_3}{1 + \nu + \epsilon_o^2} + y_3 + \frac{\nu y_1 + y_3}{1 + \nu + \epsilon_o^2}\right] \\
&= \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}\left[y_1 + y_3 + \frac{(y_1 + y_3)(1 + \nu + \epsilon_o^2) - y_1 - \nu y_3 - \nu y_1 - y_3}{1 + \nu + \epsilon_o^2}\right] \\
&= \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}\left[y_1 + y_3 + \frac{(y_1 + y_3)\epsilon_o^2}{1 + \nu + \epsilon_o^2}\right] \\
&= \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}\left[1 + \frac{\epsilon_o^2}{1 + \nu + \epsilon_o^2}\right][y_1 + y_3]
\end{aligned}$$

zu b):
Wie in Lösung von Teil a) ersichtlich, ergibt sich für die Analyse an der Stelle r_2 ab der zweiten Iteration eine Abhängigkeit von ν. Seien nun zwei Fälle gegeben: 1) Die beiden Stationen liegen nahe beieinander (ν_1) und 2) sie liegen weit auseinander (ν_2). Für die Gewichte gilt dann:

$$w_{1,2} = \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}\left(1 + \frac{\epsilon_o^2}{1 + \nu_{1,2} + \epsilon_o^2}\right)$$

Wir bilden die Differenz und erhalten

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= \frac{\mu}{2\mu + \epsilon_o^2}\left[1 + \frac{\epsilon_o^2}{1 + \nu_1 + \epsilon_o^2} - 1 - \frac{\epsilon_o^2}{1 + \nu_2 + \epsilon_o^2}\right] \\ &= \frac{\mu\epsilon_o^2}{2\mu + \epsilon_o^2}\left[\frac{\nu_2 - \nu_1}{(1 + \nu_1 + \epsilon_o^2)(1 + \nu_2 + \epsilon_o^2)}\right] \end{aligned}$$

Sei nun $\nu_2 < \nu_1$, dann folgt $w_2 > w_1$. Im Falle einer monoton fallenden Gewichtsfunktion ($w(r_1) \geq w(r_2)$ für $r_2 > r_1$), haben nahe beieinander liegende Beobachtungen weniger Gewicht als weit auseinanderliegende.

Lösung zu Aufgabe 4:
Im Falle zweier Messungen ist $\mathbf{W}^T$ in Gleichung (II 3.1) bereits symmetrisch und es gilt

$$\mathbf{W}^T = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun seien die Gewichte definiert mit

$$\begin{aligned} w(r_2, r_1) &= w(r_1, r_2) = \mu \\ w(r_1, r_1) &= w(r_2, r_2) = \nu \end{aligned}$$

Die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{C}$ sehen damit folgendermaßen aus:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{|\mu| + |\nu| + \epsilon_o^2} \\ m_2 &= \frac{1}{|\nu| + |\mu| + \epsilon_o^2} \\ c_{11} &= w(r_1, r_1) = \nu \\ c_{22} &= w(r_2, r_2) = \nu \\ c_{12} &= w(r_1, r_2) = \mu \\ c_{21} &= w(r_2, r_1) = \mu \end{aligned}$$

Mit $m := m_1^{-1} = m_2^{-1}$ gilt

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\nu & m\mu \\ m\mu & m\nu \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte λ dieser Matrix berechnen sich aus

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{W}^T - \lambda\mathbf{E}\right) &= \left|\begin{pmatrix} m\nu - \lambda & m\mu \\ m\mu & m\nu - \lambda \end{pmatrix}\right| \\ &= (m\nu - \lambda)^2 - m^2\mu^2 \\ &\stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= m\nu \pm 0.5\sqrt{4m^2\nu^2 - 4m^2(\nu^2 - \mu^2)} \\ &= m\nu \pm m\mu \\ &= \frac{\nu + \mu}{|\mu| + |\nu| + \epsilon_o^2}, \frac{\nu - \mu}{|\mu| + |\nu| + \epsilon_o^2}\end{aligned}$$

Die Eigenvektoren $\boldsymbol{x}$ mit $(\mathbf{W}^T - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ergeben sich zu

λ_1 :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m\nu - (m\nu + m\mu) & m\mu \\ m\mu & m\nu - (m\nu + m\mu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} -m\mu & m\mu \\ m\mu & -m\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

λ_2 :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m\nu - (m\nu - m\mu) & m\mu \\ m\mu & m\nu - (m\nu - m\mu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} m\mu & m\mu \\ m\mu & m\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Somit ergeben sich - wie zu erwarten war bei einer symmetrischen Matrix - orthogonale Eigenvektoren.
Im Falle von drei oder mehr Beobachtungen/Analyseorten, wird $\mathbf{W}$ nicht mehr symmetrisch. $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ haben aber identische Eigenwerte bei verschiedenen Eigenvektoren.